

Equations et inéquations

1) Equations

Définition : **Résoudre** une équation, c'est trouver l'ensemble des nombres par lesquels remplacer l'inconnue (souvent notée x), pour que l'égalité soit vraie.

Propriété :



Pour résoudre les équations, un mathématicien arabe du IX^e siècle, al-Khwarizmi, a trouvé une méthode qui s'appuie sur deux règles.

- Règle n° 1 : on ne change pas les solutions d'une équation si on ajoute ou si on soustrait le même nombre à chacun des deux membres de l'équation.
- Règle n° 2 : on ne change pas les solutions d'une équation si on multiplie ou si on divise chacun des deux membres par un même nombre non nul.

A) Méthode de résolution d'une équation

On s'appuie sur les trois propriétés vues ci-dessus.

- 1) Développer puis réduire l'expression
- 2) Isoler l'inconnue dans un seul membre de l'équation (par ajout ou soustraction)
- 3) Isoler le terme numérique dans l'autre membre de l'équation (par ajout ou soustraction)
- 4) Résoudre par multiplication ou division

Exemple

- Résoudre l'équation $6x + 5 = (3 - x) \times 4$.

Pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue, on utilise les propriétés précédentes pour isoler l'inconnue dans un membre de l'équation.

$$6x + 5 = (3 - x) \times 4 \quad \leftarrow \text{On développe et on réduit les deux membres de l'équation.}$$
$$6x + 5 = 12 - 4x$$

$$6x + 5 + 4x = 12 - 4x + 4x \quad \leftarrow \text{On ajoute } 4x \text{ aux deux membres de l'équation, puis on réduit chacun de ces membres.}$$
$$10x + 5 = 12$$

$$10x + 5 - 5 = 12 - 5 \quad \leftarrow \text{On soustrait } 5 \text{ aux deux membres de l'équation, puis on réduit chacun de ces membres.}$$
$$10x = 7$$

$$\frac{10x}{10} = \frac{7}{10} \quad \leftarrow \text{On divise les deux membres par } 10.$$

$$x = 0,7 \quad \leftarrow \text{L'équation n'a qu'une seule solution.}$$

B) Les équations produit

Propriété : Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

Définition : une équation produit est la forme factorisée d'une équation.

Ainsi, annuler un produit consistera à annuler au moins un de ses facteurs, ce qui conduit à résoudre séparément autant d'équations qu'il y a de facteurs et à rassembler les solutions de ces différentes équations.

Exemple 1 : Soit l'équation à résoudre $(2x - 3)(x + 4) = 0$. Ce produit est nul si et seulement si $(2x - 3) = 0$ ou $(x + 4) = 0$. On résout donc deux équations :

$(2x - 3) = 0$ conduit à $x = \frac{3}{2}$ et $(x + 4) = 0$ conduit à $x = -4$.

L'équation-produit de départ $(2x - 3)(x + 4) = 0$ possède donc deux solutions : -4 et $\frac{3}{2}$.

Exemple 2 : Soit l'équation à résoudre $x^2 - 2x + 1 = 0$. Reconnaître une identité remarquable permet d'écrire l'équation sous une forme factorisée : $(x - 1)^2 = 0$, qui se réduit à $(x - 1) = 0$, soit $x = 1$.