

Calcul littéral et numérique

I) Calcul littéral

Deux expressions littérales sont égales si elles sont toujours égales, c'est-à-dire si elles sont égales pour n'importe quelles valeurs attribuées aux lettres de l'expression.

A) La distributivité

1) Simple distributivité

Si k , a et b désignent des nombres, alors :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

$$k \times (a - b) = k \times a - k \times b$$

En notation simplifiée, $k(a + b) = ka + kb$ et $k(a - b) = ka - kb$

Transformer un produit en somme s'appelle **développer**,

Transformer une somme en produit s'appelle **factoriser**.

2) Double distributivité

Si le nombre k s'écrit sous la forme d'une somme $(c + d)$, alors :

$$(c + d) \times (a + b) = c \times a + c \times b + d \times a + d \times b$$

En notation simplifiée, $(c + d)(a + b) = ca + cb + da + db$

B) Identités remarquables

Dans ce qui suit, a et b désignent des nombres.

- **Carré d'une somme** : $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
- **Carré d'une différence** : $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
- **Différence de deux carrés** : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Détail du développement du carré d'une somme : $(a + b)^2 = (a + b) \times (a + b) = a \times a + a \times b + b \times a + b \times b = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Remarque : on peut retrouver la formule $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ en remplaçant, dans la formule du carré d'une somme $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, la valeur de b par celle de $-b$.

Ainsi : $(a + (-b))^2 = a^2 + (-b)^2 + 2a(-b) = a^2 + b^2 - 2ab$

C) Factorisation

Pour transformer une suite d'addition et de soustractions en produit, il faut soit reconnaître une identité remarquable (carré d'un produit ou d'une différence, différence de deux carrés) soit trouver dans les termes des opérations un **facteur commun**.

Exemples :

- $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = (x + 3)^2$
- $9x^2 - 49 = (3x)^2 - 7^2 = (3x + 7)(3x - 7)$
- $16x^3 - 4x^2 + 8x = (4x) \times 4x^2 - (4x) \times x + (4x) \times 2 = (4x) \times (4x^2 - x + 2)$

II) Calcul numérique

A) Puissances d'exposant positif

Définitions

Pour tout nombre entier n positif non nul, pour tout nombre relatif a :

$$\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}} \text{ s'écrit } a^n$$

- a^n se lit « **a exposant n** » ou « **a puissance n** »
- a^n est appelé **puissance** n -ième de a .
- n est appelé l'exposant.

» **Remarque** : Par convention $a^0 = 1$

Remarque : attention à ne pas confondre $(-a)^n$ et $-a^n$

Exemple : $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$ et $-3^4 = -81$

B) Puissances d'exposant négatif

Définitions

Pour tout nombre entier n positif non nul, pour tout nombre relatif a non nul :

$$\frac{1}{\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}} \text{ s'écrit } a^{-n}.$$

» **Remarque** : Pour tout entier n , a^{-n} est l'**inverse** de a^n soit $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ et en particulier $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Propriété :

Pour tous nombres relatifs a et b et pour tous nombres entiers m et n :

$$\begin{cases} a^m \times a^n = a^{m+n} \\ a^m \times b^m = ab^m \\ (a^m)^n = a^{mn} \end{cases}$$

C) Notation scientifique

Définitions

Tout nombre décimal non nul peut être écrit en **notation scientifique**, c'est-à-dire sous la forme $a \times 10^n$, où a est un nombre décimal **ayant un seul chiffre non nul pour partie entière** et où n est un nombre **entier relatif**.
 a est appelé **mantisse** du nombre.

Exemples :

- $6430 = 6,43 \times 10^3$
- $0,00015 = 1,5 \times 10^{-4}$

Règle : Comparaison de nombres écrits en notation scientifique

Pour comparer deux nombres en notation scientifique, on compare en premier lieu leurs signes. S'ils sont de même signe, on compare en second lieu leurs ordres de grandeur à l'aide des exposants de leur puissance de 10. Enfin, en cas d'égalité, on compare alors les mantisses.